

DOI: 10.7652/xjtuxb201307001

同轴两个气泡融合特性的数值研究

王太, 李会雄, 李阳

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 为了进一步研究气泡融合特性以及开发高效的界面追踪程序,以 PLIC 界面重构技术为基础,采用不分裂算法计算了目标网格向周围 26 个网格的输运流量;采用统一的表达式计算输运流量,大大降低了程序编写的难度。将 PLIC 算法与气液两相流动控制方程相结合,数值计算了直径为 0.8~14 mm 的单个气泡的最终运动速度,模拟结果与文献中的实验结果吻合良好。研究了同轴两个气泡的融合过程,发现表面张力很大时,两个气泡近似独立运动,不发生融合;表面张力很小时,气泡容易发生破碎;气泡发生严重破碎时,尾部气泡会从顶部气泡的轴心穿过;液体黏度与表面张力对气泡融合时间的影响不是单调的。

关键词: 不分裂算法;数值模拟;气泡融合;融合时间

中图分类号: TK124 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)07-0001-06

Numerical Investigation on Coaxial Coalescence of Two Gas Bubbles

WANG Tai, LI Huixiong, LI Yang

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To further study bubble coalescence and develop a highly efficient tracking interface program, an unsplit algorithm based on the PLIC interface reconstruction algorithm was applied to precisely calculate the fluid transport from one cell to its neighboring 26 cells, and the fluid transport of each cell was calculated using a unified expression which greatly reduces the programming difficulty and improves the calculation accuracy. The Navier-Stokes equations for gas-liquid two-phase flow were solved by combining an advection equation for liquid volume fraction to simulate the rise of the single bubble. The terminal velocities obtained by the numerical simulation for the single bubble with the diameter of 0.8-14 mm were in good agreement with the experimental data from literature. The co-axial coalescence of two gas bubbles in the initially quiescent liquid was then simulated by the unsplit algorithm. The numerical results show that when the surface tension is very high, the two bubbles rise and deform independently. The bubbles tend to break up when the surface tension is very small, and when the bubble breakup is serious, the following bubble would pass through the leading bubble. Additionally, the effect of liquid viscosity and surface tension on coalescence time is non-monotonous.

Keywords: unsplit algorithm; numerical simulation; bubble shape; bubble coalescence

气泡运动广泛存在于能源、动力、环境、化工、石油和航空与航天等领域,因此有必要对其进行深入

收稿日期: 2012-12-21。 作者简介: 王太(1986—),男,博士生;李会雄(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51176153)。

网络出版时间: 2013-04-18

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20130418.1720.001.html>

研究。国内外学者对气泡运动进行了大量的研究。Wu等实验研究了直径为1~2 mm的小气泡在上升过程中的形变以及运动轨迹^[1]；何等采用数值方法对气泡上升过程中的受力情况进行了分析^[2]；Inamuro等采用 Lattice Boltzmann 方法研究了单个气泡在方形通道内的上升过程^[3]；Yu等采用 Level Set 方法对单个气泡的上升与变形进行了系统研究^[4]，并对文献[5]中所提到的同轴两个气泡融合进行了模拟；Pu等采用基于移动网格的 Level Set 方法研究了微重力环境下气泡的融合特性^[6]；李等运用 Level Set 方法分析了初始气泡位置等对气泡融合的影响^[7]；Koebe等将白噪声加入初始流场，采用 VOF 方法研究了气泡融合过程中的涡脱落特性^[8]。

本文将文献[9-10]中的不分裂算法扩展至三维，计算了目标网格向周围26个网格的输运流量；将3D-VOF不分裂算法与气液两相流动方程相结合，数值模拟了直径为0.8~14 mm的单个气泡在静止水中的最终上升速度，并与 Clift 等的实验结果^[11]进行了对比；在此基础上，还研究了表面张力、流体黏度等对同轴两个气泡融合特性的影响。

1 数学模型与数值方法

1.1 控制方程

连续性方程、动量方程以及流体体积输运方程可描述为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot [\mu ((\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T)] - \nabla p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_\sigma \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = 0 \quad (3)$$

式中： ρ 、 μ 、 $\mathbf{u}$ 和 p 分别为流体的密度、动力黏度、速度和压力； C 为流体体积函数， $C=1$ 表示网格内全为气体， $C=0$ 表示网格内全为液体， $0 < C < 1$ 表示网格内存在相界面； $\mathbf{F}_\sigma$ 为气液间表面张力，由密度修正的CSF模型^[12]给出

$$\mathbf{F}_\sigma = \frac{2\rho}{\rho_1 + \rho_g} \sigma \mathbf{n} \quad (4)$$

界面曲率与界面法向的表达式为

$$\kappa = -(\nabla \cdot \mathbf{n}), \quad \mathbf{n} = \nabla \tilde{C} / |\nabla \tilde{C}| \quad (5)$$

式中： $\tilde{C}$ 为光滑的流体体积函数^[5,13]，其表达式为

$$\tilde{C}_{i,j,k} = \frac{\sum_{l,m,n} C_{i,j,k} D(|x_{i,j,k} - x_{l,m,n}|)}{\sum_{l,m,n} D(|x_{i,j,k} - x_{l,m,n}|)} \quad (6)$$

平滑函数定义为

$$D(x) = \begin{cases} (x/h)^4 - 2(x/h)^2 + 1 & x/h < 1 \\ 0 & x/h \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

式中： h 为光滑距离，本文取为2倍的网格宽度。

流体的密度与黏度为

$$\rho = \tilde{C} \rho_g + (1 - \tilde{C}) \rho_l \quad (8)$$

$$\rho/\mu = \tilde{C} \rho_g/\mu_g + (1 - \tilde{C}) \rho_l/\mu_l \quad (9)$$

式中：下标 g 和 l 分别表示气相和液相。

1.2 输运方程的求解

1.2.1 界面类型的确定 3D-PLIC方法用平面近似网格内的气液界面，根据界面法向的不同分为3种情况：① $|n_\alpha| > 0, n_\beta = 0, n_\gamma = 0$ ；② $|n_\alpha| > 0, |n_\beta| > 0, n_\gamma = 0$ ；③ $|n_\alpha| > 0, |n_\beta| > 0, |n_\gamma| > 0$ ，其中 α, β, γ 分别代表 x, y, z 坐标轴的某一轴。前两种情况比较简单，不作分析，对于第3种情况，通过坐标轴旋转与变换使界面的法向满足以下不等式

$$0 < n_\alpha d\alpha \leq n_\beta d\beta \leq n_\gamma d\gamma \quad (10)$$

流体体积函数 C 从0增加到1，界面会先后通过图1中的 a, b, c 点，此时对应的流体体积函数分别为 V_1, V_2, V_3 ，则可将流体体积函数划分为4个区间：① $0 \leq C \leq V_1$ ；② $V_1 < C \leq V_2$ ；③ $V_2 < C \leq V_3$ ；④ $V_3 < C \leq 1$ 。 V_1, V_2, V_3 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= [(S_\alpha + S_\beta)^3 - M(S_\alpha + S_\beta - S_\gamma)^3 - S_\beta^3 - S_\alpha^3] / (6S_\alpha S_\beta S_\gamma) \\ V_2 &= 1 - [S_\beta^3 - (S_\beta - S_\alpha)^3] / (6S_\alpha S_\beta S_\gamma) \\ V_3 &= 1 - S_\alpha^3 / (6S_\alpha S_\beta S_\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中： $S_\alpha = n_\alpha d\alpha, S_\beta = n_\beta d\beta, S_\gamma = n_\gamma d\gamma$ ；当 $S_\alpha + S_\beta > S_\gamma$ 时， $M=1$ ，否则 $M=0$ 。

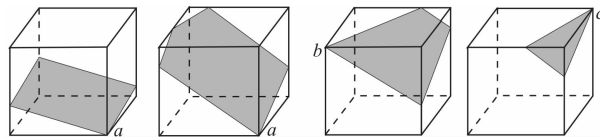


图1 流体体积函数区间分界面

相界面类型可分为8种情况，如图2所示，其中I~IV的流体体积函数值在区间①内，V、VI在区间②内，VII在区间③内，VIII在区间④内。界面类型的判断依据^[5]见表1。

1.2.2 网格输运流量的计算 网格内相界面的类型确定以后，还需确定相界面所在平面 ABC （如图3所示）的表达式

$$f_{ABC}(\alpha, \beta, \gamma) = n_\alpha(\alpha - a) + n_\beta\beta + n_\gamma\gamma = 0 \quad (12)$$

式中： a 为平面与 α 轴的交点 A 在 α 方向的坐标值。

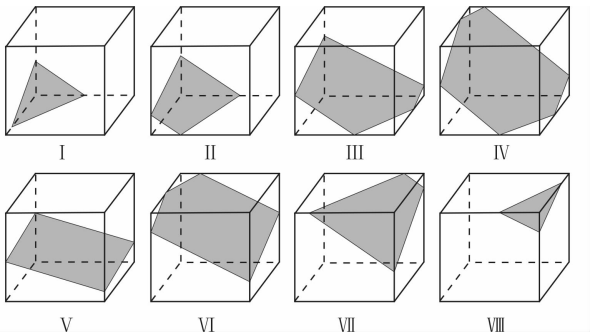


图 2 相界面类型

表 1 区间划分依据及界面类型判断准则

区 间	界 面 类 型	判断准则
1	I	$6S_{\alpha}S_{\beta}S_{\gamma}C \leq S_{\alpha}^3$
	II	$S_{\alpha}^3 < 6S_{\alpha}S_{\beta}S_{\gamma}C \leq S_{\beta}^3 - (S_{\beta} - S_{\alpha})^3$
	III	$S_{\gamma} \geq S_{\alpha} + S_{\beta}$ 且 $MS = S_{\beta}^3 - (S_{\beta} - S_{\alpha})^3 < 6S_{\alpha}S_{\beta}S_{\gamma}C$ 或 $MS \leq 6S_{\alpha}S_{\beta}S_{\gamma}C \leq S_{\gamma}^3 - (S_{\gamma} - S_{\alpha})^3 - (S_{\gamma} - S_{\beta})^3$
	IV	其他
2	V	$S_{\gamma} \geq S_{\alpha} + S_{\beta}$ 且 $C \leq V_1 + (1 - (S_{\alpha} + S_{\beta})/S_{\gamma})$
	VI	其他
3	VII	$V_2 < C \leq V_3$
4	VIII	$C > V_3$

图 4 为二维不分裂算法的示意图,网格 (I, J) 被分为 4 个小网格,网格 1、3、4 所包含的流体体积分别为向网格 $(I, J+1)$ 、 $(I+1, J+1)$ 、 $(I+1, J)$ 输运的流量^[10]。三维不分裂算法采用相同的方法计算网格 (I, J) 向相邻、斜对角以及对边共 26 个网格的输运流量。

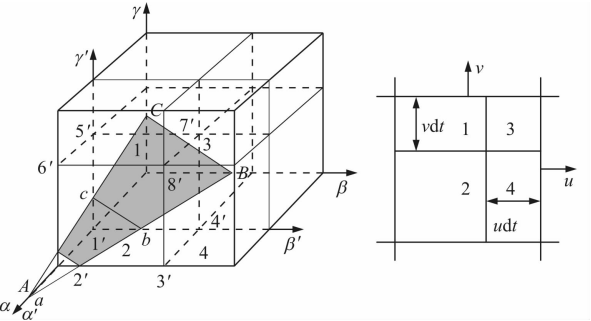


图 3 相界面位置示意图

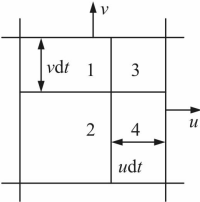


图 4 二维不分裂算法

根据网格界面速度的不同,可将图 3 所示的大网格划分为多个尺寸不同的小网格,且可通过几何关系求得每个小网格 8 个顶点 $(1' \sim 8')$ 的坐标。小网格与相界面所在平面 ABC 的关系存在 3 种情况。

(1)小网格与平面 ABC 不相交,且在相界面上

方,如图 3 中小网格 3 等,此时小网格内没有目标流体,判断依据为

$$f_{ABC}(\alpha_{1'}, \beta_{1'}, \gamma_{1'}) \geq 0 \tag{13}$$

(2)小网格与平面 ABC 不相交,但在相界面下方,此时小网格内含有目标流体,目标流体的体积等于小网格的体积,判断依据为

$$f_{ABC}(\alpha_{8'}, \beta_{8'}, \gamma_{8'}) \leq 0 \tag{14}$$

(3)小网格与平面 ABC 相交,如图 3 中小网格 2 等,此时小网格内含有目标流体,判断依据为

$$f_{ABC}(\alpha_{1'}, \beta_{1'}, \gamma_{1'}) < 0 \text{ and } f_{ABC}(\alpha_{8'}, \beta_{8'}, \gamma_{8'}) > 0 \tag{15}$$

此时,以小网格的 $1'$ 点为坐标原点建立 $\alpha'\beta'\gamma'$ 坐标系,其中 α' 、 β' 、 γ' 分别与 α 、 β 、 γ 同向。平面 ABC 与 α' 、 β' 、 γ' 坐标轴的交点分别为 a 、 b 、 c 。在 $\alpha\beta\gamma$ 坐标系下, a 、 b 、 c 点的坐标分别为 $(p, \beta_{1'}, \gamma_{1'})$ 、 $(\alpha_{1'}, q, \gamma_{1'})$ 、 $(\alpha_{1'}, \beta_{1'}, r)$,其中 p 、 q 、 r 为未知数,可通过下式得到

$$\left. \begin{aligned} f_{ABC}(p, \beta_{1'}, \gamma_{1'}) &= 0 \\ f_{ABC}(\alpha_{1'}, q, \gamma_{1'}) &= 0 \\ f_{ABC}(\alpha_{1'}, \beta_{1'}, r) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

在 $\alpha'\beta'\gamma'$ 坐标系下, a 、 b 、 c 点的坐标分别为 $(p', 0, 0)$ 、 $(0, q', 0)$ 、 $(0, 0, r')$,其中 p' 、 q' 、 r' 为未知数,可通过下式得到

$$p' = p - \alpha_{1'}; \quad q' = q - \beta_{1'}; \quad r' = r - \gamma_{1'} \tag{17}$$

小网格内的目标流体体积为向对应网格的流体输运量,由于小网格内的相界面类型比较复杂,不利于单独对每个小网格进行分析,本文采用一个统一的表达式计算小网格内的目标流体体积

$$V_p = V_1 - IV_2 - JV_3 - KV_4 + LV_5 + MV_6 + NV_7 \tag{18}$$

式中: $V_1 \sim V_7$ 分别为图 5 中四面体 $abc1'$ 、 $aif2'$ 、 $bme4'$ 、 $chn5'$ 、 $def3'$ 、 $ghi6'$ 、 $kmn7'$ 的体积; I 、 J 、 K 、 L 、 M 、 N 为方程系数。 $l_{1'a}$ 、 $l_{1'2'}$ 分别为线段 $1'a$ 、 $1'2'$ 的长度,当 $l_{1'a} > l_{1'2'}$ 时, $I = 1$, 否则 $I = 0$; 其他系数的值可通过同样的方法得到。

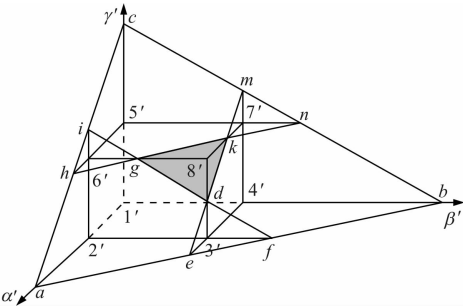


图 5 小网格流体体积求解示意图($\alpha'\beta'\gamma'$ 坐标系)

1.2.3 不分裂算法的验证 为检验此算法,考察了其在剪切流场中的效果,剪切流场为^[14]

$$\left. \begin{aligned} u &= 2\sin^2(\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z)\cos(\pi t/T) \\ v &= -\sin(2\pi x)\sin^2(\pi y)\sin(2\pi z)\cos(\pi t/T) \\ w &= -\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin^2(\pi z)\cos(\pi t/T) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

算例是一个初始形状为球形的气泡在剪切流场中的变化,计算区域为 $(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$;球心为 $(0.35,0.35,0.35)$,半径为 0.15;计算周期 $T=3$ s;计算网格为 $152 \times 152 \times 152$;时间步长为 0.001 s。由图 6 可知,此算法能够较好地模拟界面变化。

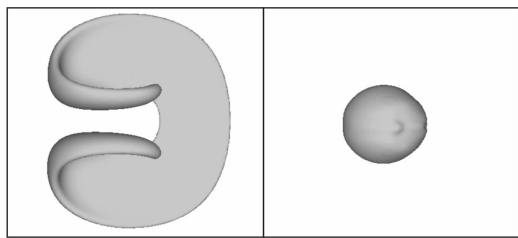


图 6 剪切流场中的气泡变形

2 结果与分析

2.1 单个气泡的上升

为了验证 3D-PLIC 不分裂算法在多相流研究中的应用,本文计算了单个气泡在静止水中的上升过程,并将气泡顶点的最终运动速度 U_T 与文献[11]的实验结果进行了对比。气泡的直径 d_e 变化范围为 0.8~14 mm,计算过程中保证气泡直径范围内具有 20 个网格。流体物性采用文献[15]中的数据。

图 7 给出了气泡顶点的最终运动速度 U_T 与实验数据^[11]的对比结果,气泡直径为 1~14 mm 的计算结果与实验结果吻合较好;气泡直径小于 1 mm 的计算结果误差较大,其主要是由计算表面张力时所产生的虚拟流引起的^[15]。总体而言,本文的数值算法可有效地计算气液两相流动。

2.2 同轴气泡的融合特性

首先模拟了埃奥特沃数 $Eo=16$ 、莫顿数 $Mo=2 \times 10^{-4}$ 的同轴两个气泡的融合过程,气泡直径均为 10 mm、初始球心间距为 15 mm,气液密度比和黏度比均为 100。图 8 展示了气泡的融合过程,模拟结果与文献[5]中的模拟结果以及文献[16]中的实验结果吻合较好。从图中可以看出:气泡上升初期,两个气泡变形不大且形状相似;随着气泡的逐渐靠近,气泡变形越来越明显,顶部气泡逐渐变为扁平的球帽状,而尾部气泡逐渐变为子弹状;最终,两个气

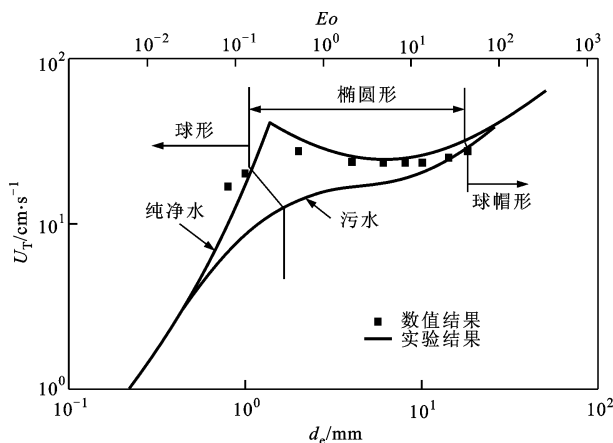
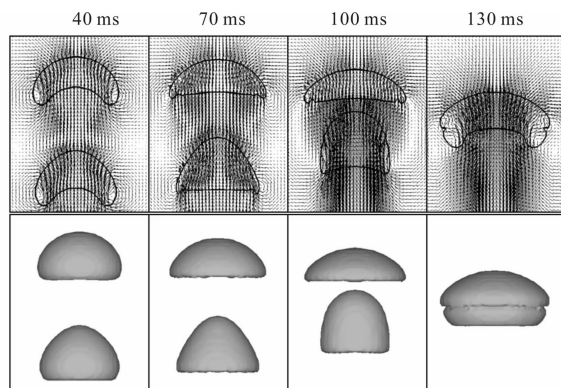


图 7 数值结果与实验结果^[11]的对比



(a) 模拟结果



(b) 实验结果^[16]

图 8 同轴两气泡融合过程图

泡接触、融合,变为一个大气泡。

图 9 为不同时刻气泡轴向的速度 U 分布,气泡上升初始,速度分布曲线存在 4 个波峰,顶部气泡对尾部气泡影响较小,两个气泡近似独立上升;尾部气泡逐渐进入顶部气泡的尾流区,速度分布曲线的波峰个数逐渐减少;进入尾流区的尾部气泡的速度迅速上升,其值甚至达到了顶部气泡速度的两倍; $t=70$ ms 时,顶部气泡的上升速度已趋于稳定,而尾部气泡仍在加速中;气泡融合后,其运动特性与单气泡的运动特性相近。

图 10 给出了不同表面张力下同轴两个气泡的融合过程,气泡初始直径为 10 mm、初始间距为 15 mm、气液密度比为 1 000、黏度比为 100。 $Eo=1$ 时,表面张力非常大,气泡变形较小,成椭球状上升,且所受到的流动阻力较小,上升速度较大,由于尾部

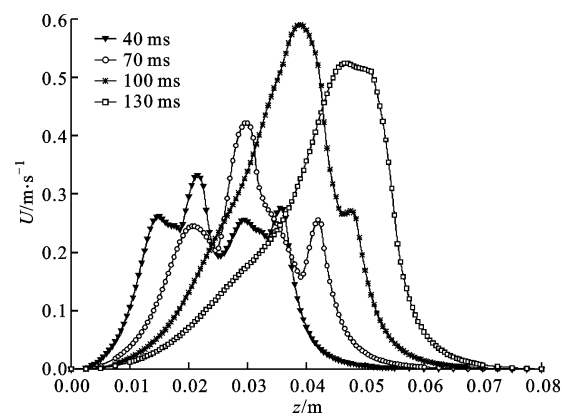
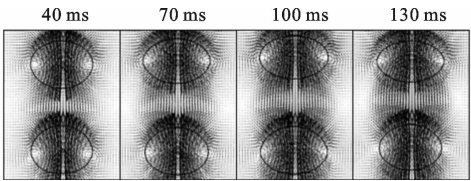
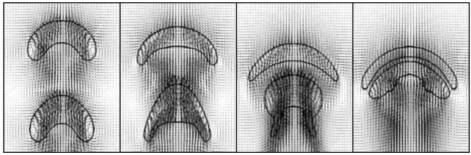


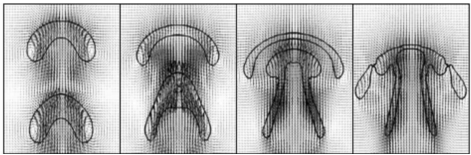
图 9 不同时刻气泡轴向的速度分布



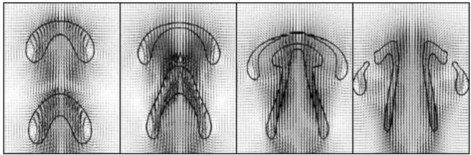
(a) $E_o=1$ 、 $Mo=6.5\times10^{-8}$



(b) $E_o=25$ 、 $Mo=1.02\times10^{-3}$



(c) $E_o=50$ 、 $Mo=8.15\times10^{-3}$



(d) $E_o=100$ 、 $Mo=6.52\times10^{-2}$

图 10 表面张力对气泡融合的影响

气泡始终没有完全进入顶部气泡的尾流区,因此两个气泡近似独立运动,相互影响较小;表面张力减小后,气泡将发生融合, $E_o=25$ 时,尾部气泡上升过程中出现短裙状,但在两个气泡即将融合时,裙带消失; $E_o=50$ 时,尾部气泡出现长裙状,且维持到两气泡融合; $E_o=100$ 时,顶部气泡与尾部气泡均发生破碎,形成气泡环,尾部气泡从顶部气泡中间穿过。表面张力越小,对气泡变形的阻止力度越弱,且气泡尾

部的射流也越强烈,因此尾部气泡的裙带越长。当表面张力不能抵消射流强度后,气泡将发生破碎,形成气泡环^[2]。

图 11 反映了气泡融合时间与表面张力的关系,从计算的结果可发现:当 $E_o<17$ 时,表面张力越小,气泡融合时间越短;当 $17<E_o<28$ 时,表面张力越小,气泡融合时间越长;当 $28<E_o<50$ 时,表面张力越小,气泡融合时间越短。可见,表面张力对气泡融合时间的影响不是单调的。

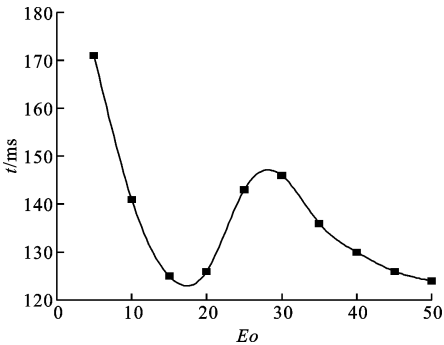
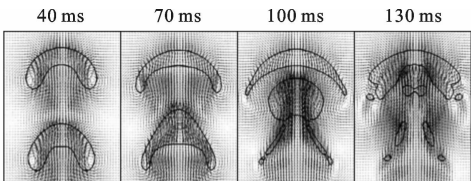
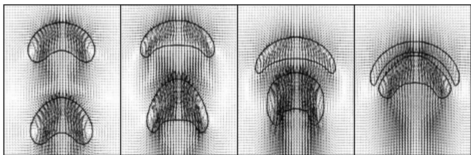


图 11 气泡融合时间与表面张力的关系

图 12 反映了液体黏度对气泡融合的影响,液体黏度较小时,气泡容易发生变形、破碎。表 2 反映了液体黏度对气泡融合时间的影响,液体黏度很大时(工况 1、2),液体黏度越大,气泡融合时间越长;液



(a) $E_o=25$ 、 $Mo=1.63\times10^{-6}$



(b) $E_o=25$ 、 $Mo=1.63\times10^{-2}$

图 12 液体黏度对气泡融合的影响

体黏度适中时(工况 3、4),液体黏度越大,气泡融合时间越短;液体黏度很小时(工况 5、6),气泡发生破碎,且气泡的破碎能够加速气泡的融合。

表 2 液体黏度对气泡融合时间的影响

工况	1	2	3	4	5	6
Mo	1.320	0.260	0.016	0.001	1.6×10^{-6}	1.6×10^{-10}
t/ms	165	153	138	143	124	114

3 结 论

本文给出了 3D-PLIC 界面类型的判断准则,并成功实施了不分裂算法,采用统一的表达式计算界面的输运流量,简化了编程难度。文中模拟了气泡在剪切流场下以及在静止流体中的运动,并对算法进行了有效验证,得到以下结论。

(1)此算法能够准确模拟剪切流场中气泡的变形,同时能有效模拟气泡运动、融合,且数值结果与实验结果吻合较好。

(2)对于同轴两个气泡的融合,表面张力很大时,两个气泡近似独立运动,成椭球状上升;表面张力很小时,气泡容易发生破碎,且尾部气泡有可能从顶部气泡的轴心穿过;表面张力与液体黏度对气泡融合时间的影响不是单调的。

参考文献:

- [1] WU M M, GHARIB M. Experimental studies on the shape and path of small air bubbles rising in clean water [J]. *Physics of Fluids*, 2002, 14(7): 49-52.
- [2] 何丹, 李彦鹏, 刘艳艳. 初始形状对浮升气泡动力特性的影响 [J]. *西安交通大学学报*, 2011, 45(1): 43-47.
HE Dan, LI Yanpeng, LIU Yanyan. Effect of initial bubble shape on dynamics of a buoyancy-driven bubble [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2011, 45(1): 43-47.
- [3] INAMURO T, OGATA T, OGINO F. Numerical simulation of bubble flows by the lattice Boltzmann method [J]. *FGCS*, 2004, 20(6): 959-964.
- [4] YU Z, FAN L S. Direct simulation of the buoyant rise of bubbles in infinite liquid using level set method [J]. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 2008, 86(6): 267-275.
- [5] VAN SINT ANNALAND M, DEEN N G, KUIPERS J A M. Numerical simulation of gas bubbles behaviors using a three-dimensional volume of fluid method [J]. *Chemical Engineering Science*, 2005, 60(11): 2999-3011.
- [6] PU L, LI H X, LV X. Numerical simulation of bubble dynamics in microgravity [J]. *Microgravity Sci Technol*, 2008, 20(3/4): 247-251.
- [7] 李彦鹏, 张乾隆, 白博峰. 竖直通道内相邻气泡对上升的直接数值模拟 [J]. *热能动力工程*, 2007, 22(4): 375-379.
LI Yanpeng, ZHANG Qianlong, BAI Bofeng. Direct simulation of the rise of a bubble pair in a vertical

channel [J]. *Journal of Engineering for Thermal Energy and Power*, 2007, 22(4): 375-379.

- [8] KOEBE M, BOTHE D, PRUESS J, et al. 3D direct numerical simulation of air bubbles in water at high Reynolds number [C]//*Proceeding of the 2002 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*. New York, USA: ASME, 2002: 14-18.
- [9] 胡影影, 朱克勤, 席葆树. 计算体积分数函数的 Youngs 不分裂算法 [J]. *清华大学学报: 自然科学版*, 2002, 42(2): 232-234.
HU Yingying, ZHU Keqin, XI Baoshu. Unsplit Youngs' algorithm for the fractional volume function [J]. *J Tsinghua Univ: Sci & Tech*, 2002, 42(2): 232-234.
- [10] 刘春, 马天宝, 宁建国. Euler 方法中的不分裂输运算法 [J]. *北京理工大学学报*, 2008, 28(10): 847-850.
LIU Chun, MA Tianbao, NING Jianguo. Unsplit transport method in Eulerian method [J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2008, 28(10): 847-850.
- [11] CLIFT R, GRACE J R, WEBER M E. *Bubbles, drops and particles* [M]. New York, USA: Academic Press, 1978.
- [12] JUNE K M, IL S P. Numerical study for laminar wavy motions of liquid film flow on vertical wall [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2011, 54(15/16): 3256-3266.
- [13] LORSTAD D, FUCHS L. High-order surface tension VOF-model for 3D bubble flows with high density ratio [J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 200(1): 153-176.
- [14] MENARD T, TANGUY S, BERLEMONT A. Coupling level set/VOF/ghost fluid methods: validation and application to 3D simulation of the primary breakup of a liquid jet [J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 2007, 33(5): 510-524.
- [15] PASSANDIDEH-FARD M, FARHANGI M M. A numerical study on bubble rise and interaction in a viscous liquid [C]//*Proceeding of the 5th International Conference on Transport Phenomena in Multiphase Systems*. Bialystok, Poland: Bialystok Technical University, 2008: 1-7.
- [16] BRERETON G, KOROTNEY D. Coaxial and oblique coalescence of two rising bubbles [C]//*The ASME Applied Mechanics Conference*. New York, USA: ASME, 1991: 1-16.

(编辑 荆树蓉)